29T MATH

2019

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Roy Library

Q. No. ***1*** *(a–j) carries* ***1*** *mark each*	1×10	=	10
Q. Nos. ***2–13*** *carry* ***4*** *marks each*	4×12	=	48
Q. Nos. ***14–20*** *carry* ***6*** *marks each*	6×7	=	42
	Total	=	100

Contd.

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

1. Answer the following questions : $1\times10=10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Let $A=\{x:1<x<10,\ x \text{ is an odd natural number}\}$ and

$B=\{y\ :\ 90<y<100, y \text{ is a prime number}\}$.

Write the number of relations from A to B. 1

ধৰা হ'ল $A=\{x:1<x<10,\ x$ এটা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা $\}$ আৰু

$B=\{y\ :\ 90<y<100,\ y$ এটা মৌলিক সংখ্যা $\}$।

A ৰ পৰা B লৈ হোৱা সম্বন্ধৰ সংখ্যা লিখা।

(b) Write down the range of $f(x)=cot^{-1}x$. 1

$f(x)=cot^{-1}x$ ফলনৰ পৰিসৰ লিখা।

(c) Find all the positive values of 2×2 determinants whose entries are from the set $\{-1, 0, 1\}$. 1

সংহতি $\{-1, 0, 1\}$ ৰ মৌল সমূহেৰে গঠিত 2×2 সাৰণিকবোৰৰ সকলো ধনাত্মক মান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Let A be a skew-symmetric matrix of odd order. Write the value of $|A|$. 1

ধৰা হ'ল A এটা অযুগ্ম মাত্ৰাৰ বিষম সমমিত মৌলকক্ষ। $|A|$ ৰ মান লিখা।

Roy Library

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

(e) Let A be a matrix of order 3, such that $|A| = -9$. Find the value of $\left|-3\,A^{-1}\right|$. 1

ধৰা হ'ল A এটা 3 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষ য'ত $|A| = -9$। $\left|-3\,A^{-1}\right|$ ৰ মান নিৰ্ণয় ক'ৰা।

(f) If $2^x = 3^y$, then find $\dfrac{dy}{dx}$. 1

যদি $2^x = 3^y$, তেন্তে $\dfrac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Evaluate $\int 2x\, f'(x^2)\, dx$. 1

$\int 2x\, f'(x^2)\, dx$ নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Find the order and degree of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0.$$ 1

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$ অবকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু ঘাত নিৰ্ণয় কৰা।

(i) Write the interval in which the function $f(x) = \cos x$ is strictly decreasing. 1

$f(x) = \cos x$ ফলনটো কোনটো অন্তৰালত সতত হ্ৰাসমান হয় লিখা।

Roy Library

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

(j) Write the equation of the plane passing through (a, b, c) and parallel to xy-plane. 1

(a, b, c) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু xy-সমতলৰ সমান্তৰাল হোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ লিখা।

2. Let the mapping $f(x) = ax + b$, $a > 0$, maps $[-1, 1]$ onto $[0, 2]$; show that $cot\left(cot^{-1} 7 + cot^{-1} 8 + cot^{-1} 18\right) = f(2)$. 4

ধৰা হ'ল ফলন $f(x) = ax + b$, $a > 0$ আৰু $[-1, 1]$ ৰ আচ্ছাদন প্ৰতিচিত্ৰ হ'ল $[0, 2]$; দেখুওৱা যে, $cot\left(cot^{-1} 7 + cot^{-1} 8 + cot^{-1} 18\right) = f(2)$.

OR / অথবা

Find the value of

$$cos^{-1} x + cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}\right)\right\}, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1.$$

$cos^{-1} x + cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}\right)\right\}, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. Let $f : R \to R$ is defined by $f(x) = 3x - 2$ and $g : R \to R$ is defined by $g(x) = \frac{x + 2}{3}$. Show that $f \cdot g = g \cdot f$. 4

Roy Library
Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

ধৰা হ'ল $f : R \to R$ ক $f(x) = 3x - 2$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে আৰু $g : R \to R$ ক $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে।

দেখুওৱা যে, $f \cdot g = g \cdot f$.

4. Show that

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$ 4

দেখুওৱা যে,

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Roy Library

OR / অথবা

Without expanding show that

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

বিস্তাৰ নকৰাকৈ দেখুওৱা যে,

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

5. Show that the function f defined by

$f(x) = |1 - x + |x||$, $x \in R$ is a continuous function. 4

দেখুওৱা যে, $f(x) = |1 - x + |x||$, $x \in R$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ ফলন f, এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন।

OR / অথবা

Discuss the applicability of Rolle's theorem to the function $f(x) = x^2 + 1$ on $[-2, 2]$.

ফলন $f(x) = x^2 + 1$, অন্তৰাল $[-2, 2]$ ত ৰলচ্ উপপাদ্যৰ প্ৰয়োগ আলোচনা কৰা।

Roy Library

6. If $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

7. If $y = \frac{1}{2} cos^{-1}\left(\frac{1 - 4x^3}{1 + 4x^3}\right)$, $x \geq 0$,

find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y = \frac{1}{2} cos^{-1}\left(\frac{1 - 4x^3}{1 + 4x^3}\right)$, $x \geq 0$,

তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

OR / অথবা

Determine the set of all points where the function $f(x) = x|x|$ is differentiable.

ফলন $f(x) = x|x|$ অৱকলনীয় হোৱাৰ বিন্দুসমূহৰ সংহতি নিৰ্ধাৰণ কৰা।

8. Evaluate $\int \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ 4

$\int \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Evaluate $\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x}\, dx$.

$\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x}\, dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

9. Evaluate $\int_0^1 \frac{3 - x^2}{(3 + x^2)^2}\, dx$. 4

$\int_0^1 \frac{3 - x^2}{(3 + x^2)^2}\, dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Roy Library

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

OR / অথবা

Evaluate $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx$

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\,dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

10. Solve the differential equation 4

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

অৱকল সমীকৰণ $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ সমাধান কৰা।

Roy Library

11. If $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$,

show that $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$. 4

যদি $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$,

দেখুওৱা যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ ।

12. If $\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ and $\vec{b} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$ then determine the vector component of $\vec{a}$ along $\vec{b}$. 4

যদি $\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ আৰু $\vec{b} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$ তেন্তে $\vec{b}$ ৰ দিশত $\vec{a}$ ৰ ভেক্টৰ উপাংশ নিৰ্ণয় কৰা।

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

OR / অথবা

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$, where $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ and $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$.

$\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ তেন্তে $\vec{a}+\vec{b}$ আৰু $\vec{a}-\vec{b}$ দুয়োটা ভেক্টৰৰ ওপৰত লম্ব হোৱা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

13. A natural number is selected at random from the set $A=\{x : 1\leq x\leq 50\}$. Find the probability such that the number satisfies the inequation $x^2-13x\leq 30$. 4

সংহতি $A=\{x : 1\leq x\leq 50\}$ ৰ পৰা যাদৃশিক ভাবে এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা নিৰ্বাচন কৰা হ'ল। সংখ্যাটোৱে অসমতা সমীকৰণ $x^2-13x\leq 30$ সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

Roy Library

14. If $A=\begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, then

show that $I+A=(I-A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

where I is the identity matrix of order 2. 6

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, তেন্তে

দেখুওৱা যে, $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

য'ত I এটা 2 মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষ।

OR / অথবা

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}; and hence solve the system of equations

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

Roy Library

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, তেন্তে A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা; আৰু

সমীকৰণ পদ্ধতি

$$x + 2y - 3z = -4$$
$$2x + 3y + 2z = 2$$
$$3x - 3y - 4z = 11$$

সমাধান কৰা।

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

15. Form the differential equation satisfied by $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, where a and b are arbitrary constants. 6

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ সমীকৰণে সিদ্ধ কৰা অবকলজ সমীকৰণ গঠন কৰা, য'ত a আৰু b ঐচ্ছিক ধ্ৰুবক।

OR / অথবা

Find the maximum and minimum values of the function $f(x)=x+\sin 2x$ on $[0, 2\pi]$.

$[0, 2\pi]$ অন্তৰালত $f(x)=x+\sin 2x$ ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

Roy Library

16. Prove that the area of a right angled triangle of a given hypotenuse is maximum when the triangle is isosceles. 6

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰদত্ত অতিভুজ বিশিষ্ট এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ কালি সৰ্বোচ্চ হব যেতিয়া ত্ৰিভুজটো সমদ্বিবাহু হব।

OR / অথবা

Find the area of the smaller portion enclosed by the curves $x^2+y^2=9$ and $y^2=8x$.

$x^2+y^2=9$ আৰু $y^2=8x$ বক্ৰই আগুৰা সৰু অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

17. Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$

and $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu\left(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}\right)$. 6

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$ আৰু $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu\left(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}\right)$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Find the equations of two lines through the origin which intersect the line $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ at $\dfrac{\pi}{3}$.

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে পাৰহৈ যোৱা $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$ ৰেখাডালক $\dfrac{\pi}{3}$ কোণত ছেদ কৰা ৰেখা দুডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

18. Prove that $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\times\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 2\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$. Hence find the area of the parallelogram whose diagonals are the vectors

$3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$. 6

Roy Library

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

প্ৰমাণ কৰা যে $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$। এতেকে ভেক্টৰ $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ আৰু $\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ কৰ্ণ বিশিষ্ট সমান্তৰিকৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Find the vector equation of the line passing through $(1, 2, 3)$ and parallel to the planes $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ and $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$.

$(1, 2, 3)$ বিন্দুৰ মাজেৰে পাৰহৈ যোৱা আৰু $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ আৰু $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ সমতলৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

19. Solve the linear programming problem graphically. 6

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ ৰৈখিক প্ৰগ্ৰেমিং সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা।

Maximize $z = 20x + 15y$, subject to the conditions

$2x + y \leq 200$,
$x + y \leq 150$ and $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$z = 20x + 15y$ ৰ সৰ্ব্বোচ মান উলিওৱা

য'ত,

$2x + y \leq 200$,
$x + y \leq 150$ আৰু $x \geq 0$, $y \geq 0$ ।

Roy Library

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

OR / অথবা

Maximize and minimize

$z = 5x + 2y$, subject to the conditions,

$$x - 2y \le 2,$$
$$3x + 2y \le 12,$$
$$-3x + 2y \le 3 \quad \text{and} \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

$z = 5x + 2y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা

য'ত

$$x - 2y \le 2,$$
$$3x + 2y \le 12,$$
$$-3x + 2y \le 3$$ আৰু $x \ge 0, \quad y \ge 0$ ।

Roy Library

20. Two numbers are selected at random from a set of first 90 natural numbers. Find the probability that the product of randomly selected numbers is divisible by 3. 6

প্ৰথম 90টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা 2টা সংখ্যা যাদৃশিকভাবে নিৰ্ব্বাচন কৰা হ'ল। যাদৃশিকভাৱে নিৰ্ব্বাচন কৰা সংখ্যা দুটাৰ গুণফল 3ৰে বিভাজ্য হোবাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

In a 3×3 matrix, entries a_{ij} are selected randomly from the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 with replacement where each element a_{ij} is a three digit number. Find the probability that each element in each row is divisible by 15.

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

এটা 3×3 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষৰ মৌলসমূহ a_{ij} ক অংক 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9ৰ পৰা পুনৰস্থাপিত হিচাবত যাদৃশিকভাবে নিৰ্ব্বাচন কৰা হৈছে, য'ত প্ৰত্যেক a_{ij} এটা তিনিটা অংক বিশিষ্ট সংখ্যা। প্ৰত্যেক শাৰীৰ প্ৰত্যেক মৌল 15ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

———×———

Roy Library

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.

Roy Library

Protected with free version of Watermarkly. Full version doesn't put this mark.